FACULTATEA DE AUTOMATICĂ ŞI CALCULATOARE
DEPARTAMENTUL DE AUTOMATICĂ ŞI INFORMATICĂ INDUSTRIALĂ
Bd.Vasile Pârvan 2
1900 Timişoara
Romania
Tel./Fax.: +40 256 40 32 10; +40 256 40 32 41

TEORIA SISTEMELOR I – LUCRAREA DE LABORATOR 2 (o şedință)

SEMNALE ANALOGICE SI SEMNALE NUMERICE

A. Obiective

- Fixarea unor cunoştințe teoretice fundamentale despre semnalele analogice şi numerice;
- Fixarea unor cunoştințe referitoare la modul de tratare a semnalelor în domeniul timp şi în domeniul variabilelor complexe s şi z;
- Familiarizarea cu modalitatea de modelare, generare şi vizualizare a semnalelor în cadrul mediului de programare Simulink.

B. Considerații pregătitoare

Definiții

Prin noțiunea de ***mărime*** sau ***variabilă*** se înțelege o entitate a cărei valoare se poate modifica în timp. Ca exemple de mărimi menționăm: curentul electric, tensiunea electrică, puterea activă, poziția, viteza, presiunea, debitul şi temperatura. Dacă valorile unei mărimi se presupun cunoscute cu exactitate ne găsim în cazul determinist. Dacă ele sunt cunoscute numai prin intermediul probabilităților asociate diferitelor intervale de valori, ne găsim în cazul probabilistic.

Denumim ***mărimi de intrare*** (u) ale unui sistem acele mărimi care acționează din exterior asupra sistemului şi sunt independente de mărimile din sistem. Denumim ***mărimi de ieşire*** (y) ale unui sistem acele mărimi care sunt furnizate de sistem şi care depind de sistem şi de mărimile de intrare ale sistemului sau numai de sistem. Mărimile de intrare şi mărimile de ieşire sunt denumite în comun *mărimi de interfațare* (cu exteriorul) sau *mărimi terminale*. Starea energetică a unui sistem la un moment dat se poate descrie în mod complet prin intermediul unor mărimi interne sistemului denumite ***mărimi de stare*** (x).

Prin ***semnal*** înțelege o mărime fizică aptă de a se propaga într-un anumit mediu, provenită de la un generator (sistem amonte) şi destinată unui receptor (sistem aval), mărime care are una sau mai multe caracteristici purtătoare de informație referitoare la una sau mai multe mărimi măsurabile asociate. Caracteristicile purtătoare de informaţie specifice unui semnal se numesc ***variabile informaţionale***. De exemplu un parametrul informaţional al unui semnal sinusoidal este amplitudinea instantanee.

Urmărirea semnalelor şi a evoluţiei sistemelor în timp se face în mod obişnuit pe mulţimi de timp **T** continue sau discrete, înzestrate cu relaţia de ordine totală “ $\le$ ”.

- Dacă **T** este o mulţime reală continuă mărginită sau nemărginită avem de-a face cu ***semnale*** şi ***sisteme în timp continuu*** (STC). Semnalele din fig. 1a, fig. 2, sunt semnale în timp continuu.
- Dacă **T** este o mulţime finită sau numărabilă de momente izolate avem de-a face cu ***semnale*** şi ***sisteme în timp discret*** (STD). Semnalele din fig. 1d, fig. 3, sunt semnale în timp discret.

Prin ***semnal analogic*** se înţelege un semnal în timp continuu, având variaţii continue şi / sau discontinue şi al cărui domeniu al valorilor variabilelor informaţionale este o mulţime continuă. Semnalele din fig. 1a, fig. 2, sunt totodată şi semnale analogice.

Prin ***semnal eşantionat*** se înţelege un semnal analogic care corespunde unei mărimi observate şi interpretate de o manieră intermitentă (ex. fig. 1c). În majoritatea cazurilor practice eşantionarea se face la intervale de timp constante, periodic. Perioada poartă denumirea de perioadă de eşantionare. Ea se notează cu h.

Prin ***semnal numeric*** se înţelege în mod obişnuit un şir de numere, reprezentând de regulă un semnal în timp discret şi cuantificat, a cărui variabilă informaţională este reprezentată de numere manipulate sub formă codată.

În aplicaţii de măsurare în vederea prelucrării numerice semnalele numerice se obţin prin ***discretizarea semnalelor analogice*** în timp şi în amplitudine. Variabila informaţională redă numărul de cuante pe care le conţine mărimea eşantionului curent. Dacă pentru un semnal analogic y amplitudinea cuantei este $\Delta y > 0$ şi valoarea semnalului eşantionat la momentul t_k = kh este y(kh), atunci valoarea cuantizată a semnalului considerată pentru acelaşi moment t_k se poate calcula cu relaţia (există şi alte modalităţi de cuantizare): $\bar{y}(kh) = \left[\frac{y(kh)}{\Delta y}\right]$. În această relaţie [a] reprezintă partea întreaga a numărului real a.

Întrucât cuantizarea complică reprezentările, de regulă acceptăm că în modelele matematice domeniul de valori ale semnalelor numerice este continuu, renunţându-se la operaţia de discretizare în amplitudine. În această ipoteză semnalele din fig. 1d şi fig. 3 sunt semnale în timp discret pentru care operaţia de cuantizare este omisă. Aceasta este maniera în care vom trata semnalele numerice în îndrumarul de laborator. Atunci când se doreşte explicitarea caracterului de „semnal numeric” se foloseşte notaţia cu supraliniere (de exemplu semnalul $\bar{y}$ din fig. 1d).

Cea mai des întâlnită metodă de discretizare a timpului este cea ilustrată în fig.1.b,c,d. şi anume: discretizarea cu pas **h** constant. Din semnalul analogic se extrag periodic cu perioada **h** eşantioane (de aici provine denumirea de perioadă de eşantionare). Ele se cuantizează (fig.1.b. şi fig.1.c.) şi se convertesc în coduri numerice. Se obţine astfel ***semnalul numeric*** (fig.1.d.).

În cazul sistemelor de reglare automată la care procesul condus este analogic iar partea de comandă este realizată sub forma unui echipament numeric, sisteme ***hibride*** structural şi temporal, echipamentul numeric obţine informaţia despre procesul condus prin ***achiziţie de date.*** Aceasta se face intermitent prin operaţii de ***eşantionare*** a ieşirii procesului condus**,** ***cuantizare*** a eşantioanelor şi ***conversie analog-numerică,*** adică prin discretizarea semnalului analogic de la ieşirea procesului reglat.

Pentru uniformizarea notaţiilor la STC şi STD, referitor la semnalele în timp discret se introduce următoarea *convenţie de notare*: se foloseşte mai întâi în loc de argumentul **kh** notaţia **k** cu precizarea **k**$\in$**N (**sau **k**$\in$**Z),** iar apoi în loc de **k,** se foloseşte **t, t**$\in$**N (**sau **t**$\in$**Z).** Prin urmare la STC **t** înseamnă timp absolut **t**$\in$$\mathbf{R}_+$ **(**sau **t**$\in$**R)** iar la STD **t, t**$\in$**N (**sau **t**$\in$**Z)** înseamnă timp relativ (raportat la h).

Semnale de intrare tipizate

Analiza temporală a sistemelor fizice se face în mod obişnuit pe baza semnalelor tipizate.

- Principalele tipuri de semnale tipizate şi modelele lor în domeniul timp continuu sunt:

  1) ***semnalul treapta unitate*** sau ***treapta Heaviside*** (fig.2.b.) definit prin:

$$\sigma(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geq 0\end{cases}; \qquad (2)$$

  2) ***semnalul rampa unitate*** sau ***treapta de viteză*** (fig.2.c.) definit prin:

$$r(t) = t\cdot\sigma(t)\ ; \qquad (3)$$

  3) ***semnal impulsul unitar*** sau ***impulsul Dirac*** (fig.2.a), definit ca situaţia limită:

$$\delta(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{\varepsilon}\cdot\sigma(t)-\frac{1}{\varepsilon}\cdot\sigma(t-\varepsilon)\right] \qquad (4)$$

Impulsul Dirac nu este o funcţie propriu-zisă ci o funcţie generalizată (distribuţie). În sens distribuţii sunt valabile legăturile:

$$\dot{\sigma}(t) = \delta(t)\ , \qquad \dot{r}(t) = \sigma(t) \qquad (5)$$

  4) ***semnal sinusoidal unitar*** (fig.2.d.), definit prin:

$$\mu(t) = \sigma(t)\cdot\sin\omega_0 t \qquad (6)$$

- In fig.3.a.,b.,c.,d.,e.,f. sunt prezentate semnalele numerice tipizate obţinute prin discretizare cu pasul **h** din semnalele analogice tipizate din fig.2.a.,b.,c.,d.,e.,f. (s-a considerat $\mathbf{h < \tau < 2h}$).

- In domeniul variabilei complexe „s" sau al imaginilor, unei funcţii în timp continuu **f(t)** care îndeplineşte condiţiile de funcţie original, ii corespunde prin transformarea Laplace bilaterală, dată de relaţia:

$$f(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}\cdot dt \quad , \qquad (7)$$

o funcţie **f(s)** de variabilă complexă ***s*** numită imagine Laplace. Dacă f(t) = 0 pentru t < 0, din (7) se obţine transformata Laplace unilaterală

$$f(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad . \qquad (7')$$

Pentru operația de transformare se foloseşte simbolul (cu halteră) $f(t) \circ\!-\!\bullet\, f(s)$.

În acest de al doilea caz este valabilă următoarea formă a teoremei derivării:

$$f^{(n)}(t) \;\circ\!-\!\bullet\; s^n f(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^i f^{(n-i-1)}(0_+) \qquad (8)$$

sau

$$f^{(n)}(t) \;\circ\!-\!\bullet\; s^n f(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^i f^{(n-i-1)}(0_-) \; . \qquad (8')$$

- In domeniul variabilei complexe „z” unei secvențe numerice $\{ f(k) \}$, $k \in N$ i se asociază prin transformarea **Z** (unilaterală), în caz de convergență a sumei din (9), funcția:

$$f(z) = Z\{f(k)\} = f(0) + f(1)\, z^{-1} + f(2)\, z^{-2} + f(3)\, z^{-3} + \dots \qquad (9)$$

În cazul transformatei **Z** folosim simbolizarea: $\{f(t)\} \; \Vert\!\!-\!\!-\!\!-\!\!| \; f(z)$.

Pentru transformata **Z** sînt valabile următoarele teoreme de deplasare (în ipoteza completării şirurilor, la stînga, cu termeni nuli):

-la stînga: ***- la dreapta:***

$$Z\{f(k + n)\} = z^n \left(Z\{f(k)\} - \sum_{i=0}^{n-1} f(i)\, z^{-i}\right) \qquad (10) \; ; \qquad Z\{f(k - n)\} = z^{-n} Z\{f(k)\} \qquad (11)$$

C. Programul lucrării

1) Operații în domeniul timp folosind programul Matlab

a) Calculați (folosind programul Matlab) valorile semnalelor în timp discret $\bar{y}_1(t)$ şi $\bar{y}_2(t)$ obținute pentru $t \in \{0,1,\dots,6\}$ şi $h = 0 . 5$ sec. din semnalele în timp continuu:

$$y_1(t) = 5(1 - e^{-\frac{t}{2}}), \quad t \ge 0, \qquad y_2(t) = 3 \sin \frac{\pi}{4} t \;, \quad t \ge 0 \quad .$$

(atenție la convenția de notare!). Reprezentați grafic semnalele în timp discret.

b) Aceeaşi problemă ca la punctul **a)** pentru $h = 1 . 2$ sec.

2) Operații în domeniul variabilelor complexe „s” şi „z”.

c) Aflați imaginile operaționale ale semnalelor continue $y_1(t)$, $y_2(t)$. (Folosiți tabelele din ANEXA I).

d) Aflați imaginile operaționale ale semnalelor în timp discret obținute la punctele 1).a) si 1).b), prelungite pentru $t \ge 7$, $t \in N$ cu valori nule, folosind atât definiția transformatei **Z** cât si tabelele de transformare din ANEXA I. Metoda de rezolvare din cel de al doilea caz se va discuta la laborator.

3) Semnale şi scheme Simulink

e) Se vor folosi schemele Simulink din ANEXA II pentru generarea şi vizualizarea semnalelor din fig. 2 şi 3.b,...,f). Se vor trasa în Matlab graficele semnalelor generate.

D. Conținutul referatului

1) - semnalele discrete obținute la punctul C-1a şi C-1b;

2) - expresiile în **s** si **z** obținute la C-2c şi C-2d;

3) - fig.4.a,b.,c. şi expresiile matematice ale semnalelor în timp obținute la punctul B.2).a).

4) - expresiile matematice ale semnalelor în domeniul operațional obținute la punctul B.2).b).

5) –modelele matematice în domeniul timp şi în domeniul complex pentru semnalele din fig. 4.

Observație

Un semnal treaptă unitate întârziat cu τ secunde este reprezentat în fig.2.e. In fig.2.f. se arată un semnal rampă întârziat cu $\boldsymbol{\tau}$ secunde. Ele pot fi scrise analitic astfel:

$$u(t) = \sigma(t - \tau)$$ - semnalul treaptă întârziat,

$$u(t) = r(t - \tau) = (t - \tau) \cdot \sigma(t - \tau)$$ - semnalul rampă întârziat.

Semnalele discontinue de tip scară şi rampă pot fi scrise ca sume de semnale de tipul celor din fig.2.b.,c.,e.,f..

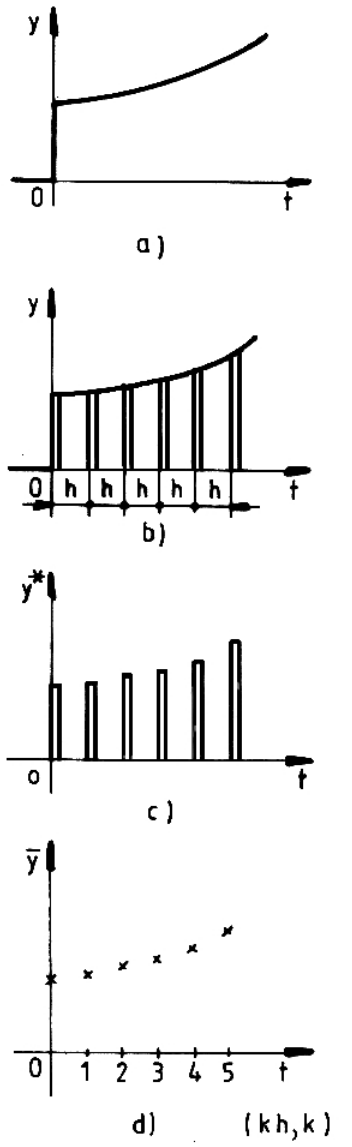

FIG 1. Esantionarea, cuantizarea şi conversia analog-numerică

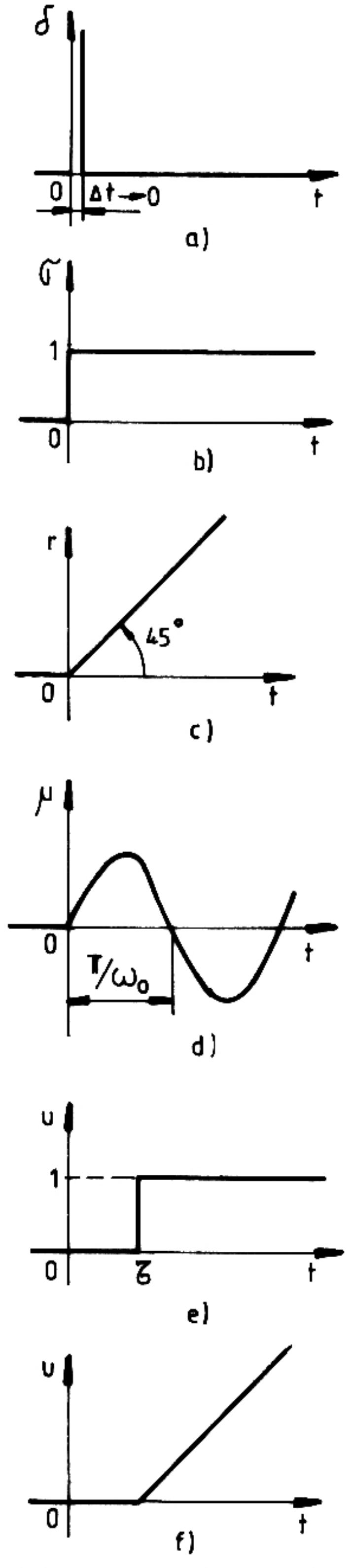

FIG. 2 – Semnale tipizate continue

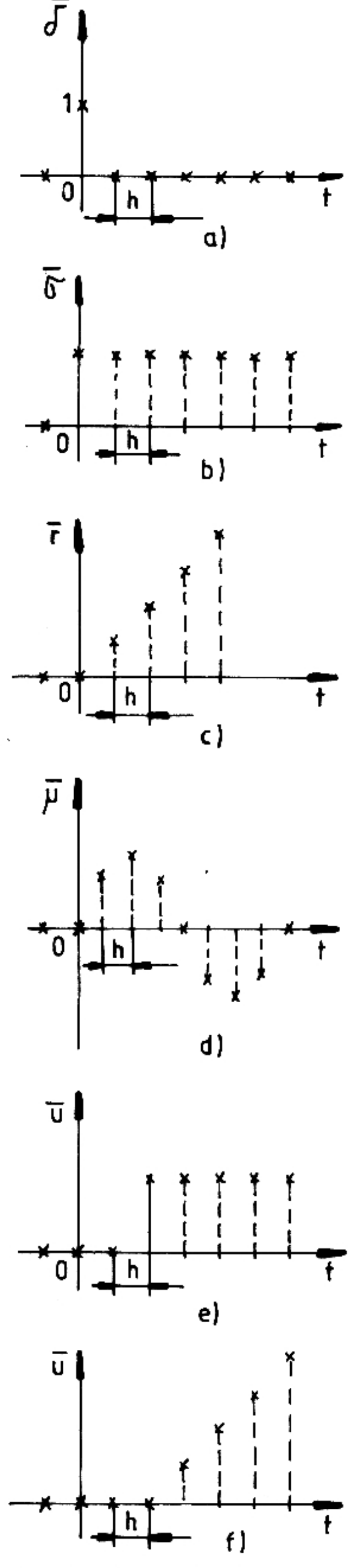

Fig. 3. Semnale tipizate discretizate

E. Întrebări

I.

1) Ce înțelegeți prin semnal în timp continuu continuu? Dar prin semnal în timp discret? Dar prin discretizarea unui semnal analogic?
2) Care sunt principalele semnale tipizate ?
3) Care este teorema derivării?
4) Care sunt teoremele de deplasare la stânga si respectiv la dreapta?

II.

Imaginați un exemplu de semnal continuu pe care apoi să îl discretizați. Aflați imaginile operaționale ale semnalului continuu si ale semnalului discret obținut.

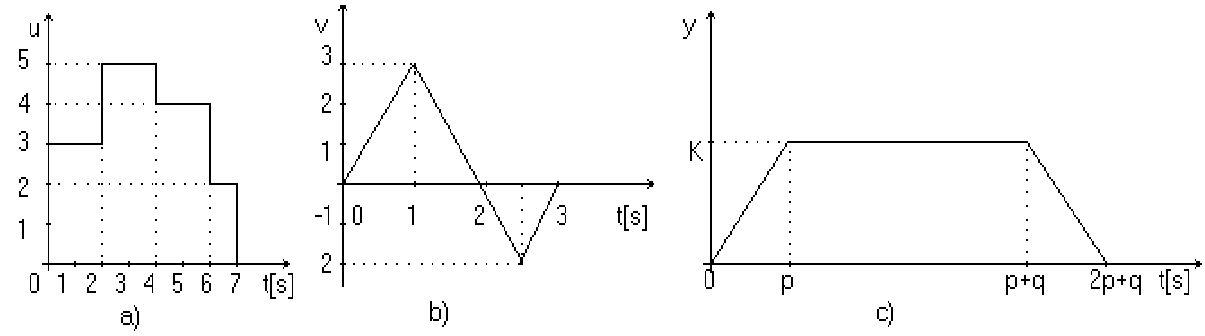

Fig.4 Semnale analogice

ANEXA I

TRANSFORMATELE LAPLACE SI Z ALE FUNCTIILOR DE TIMP UZUALE

$f(t)$	$f(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(z)=\mathcal{Z}\{f(kh)\}=\mathcal{Z}\{f(s)\}$	$f(z,\vartheta)=\mathcal{Z}\{f(kh+\vartheta h)\}=\mathcal{Z}_{\vartheta}\{f(s)\}$, $0\leq\vartheta<1$
$\delta(t)$	1	1	1
$\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{z}{z-1}$
$t\sigma(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{hz}{(z-1)^2}$	$\frac{hz[\vartheta z+(1-\vartheta)]}{(z-1)^2}$
$t^2\sigma(t)$	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{h^2z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\frac{h^2z[\vartheta^2z^2+(1+2\vartheta-2\vartheta^2)z+(1-\vartheta)^2]}{(z-1)^3}$
$t^n\sigma(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\lim\limits_{a\to 0}\frac{\partial^n}{\partial s^n}\left\{\frac{z}{z-e^{ah}}\right\}$	$\lim\limits_{a\to 0}\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left\{\frac{ze^{a\vartheta h}}{z-e^{ah}}\right\}$
$e^{-at}\sigma(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-ah}}$	$\frac{ze^{-a\vartheta h}}{z-e^{-ah}}$
$te^{-at}\sigma(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{hze^{-ah}}{(z-a^{-ah})^2}$	$\frac{hze^{-a\vartheta h}[\vartheta z+(1-\vartheta)e^{-ah}]}{(z-e^{-ah})^2}$
$t^ne^{at}\sigma(t)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left\{\frac{z}{z-e^{ah}}\right\}$	$\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left\{\frac{ze^{a\vartheta h}}{z-e^{ah}}\right\}$
$(1-e^{-at})\sigma(t)$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1-e^{-ah})z}{(z-1)(z-e^{-ah})}$	$\frac{(1-e^{-a\vartheta h})z^2+(e^{-a\vartheta h}-e^{-ah})z}{(z-1)(z-e^{-ah})}$
$\sigma(t)\sin\omega_o t$	$\frac{\omega_o}{s^2+\omega_o^2}$	$\frac{z\sin\omega_o h}{z^2-2z\cos\omega_o h+1}$	$\frac{z^2\sin\vartheta\omega_o h+z\sin(1-\vartheta)\omega_o h}{z^2-2z\cos\omega_o h+1}$
$\sigma(t)\cos\omega_o t$	$\frac{s}{s^2+\omega_o^2}$	$\frac{z(z-\cos\omega_o h)}{z^2-2z\cos\omega_o h+1}$ (*)	$\frac{z^2\cos\vartheta\omega_o h-z\cos(1-\vartheta)\omega_o h}{z^2-2z\cos\omega_o h+1}$
$\sigma(t)e^{-at}\sin\omega_o t$	$\frac{\omega_o}{(s+a)^2+\omega_o^2}$	$\frac{ze^{-ah}\sin\omega_o h}{z^2-2ze^{-ah}\cos\omega_o h+e^{-2ah}}$	$\frac{[z\sin\vartheta\omega_o h+e^{-ah}\sin(1-\vartheta)\omega_o h]ze^{-a\vartheta h}}{z^2-2ze^{-ah}\cos\omega_o h+e^{-2ah}}$
$\sigma(t)e^{-at}\cos\omega_o t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_o^2}$	$\frac{z^2-ze^{-ah}\cos\omega_o h}{z^2-2ze^{-ah}\cos\omega_o h+e^{-2ah}}$ (**)	$\frac{[z\cos\vartheta\omega_o h-e^{-ah}\cos(1-\vartheta)\omega_o h]ze^{-a\vartheta h}}{z^2-2ze^{-ah}\cos\omega_o h+e^{-2ah}}$
$\sigma(t)\mathrm{sh}\,\omega_o t$	$\frac{\omega_o}{s^2-\omega_o^2}$	$\frac{z\,\mathrm{sh}\,\omega_o h}{z^2-2z\,\mathrm{ch}\,\omega_o h+1}$	$\frac{z[z\,\mathrm{sh}\,\vartheta\omega_o h+\mathrm{sh}(1-\vartheta)\omega_o h]}{z^2-2z\,\mathrm{ch}\,\omega_o h+1}$
$\sigma(t)\mathrm{ch}\,\omega_o t$	$\frac{s}{s^2-\omega_o^2}$	$\frac{z(z-\mathrm{ch}\,\omega_o h)}{z^2-2z\,\mathrm{ch}\,\omega_o h+1}$	$\frac{z[z\,\mathrm{ch}\,\vartheta\omega_o h+\mathrm{ch}(1-\vartheta)\omega_o h]}{z^2-2z\,\mathrm{ch}\,\omega_o h+1}$

(*) caz special daca $\omega_o h=\pi$ atunci $\mathcal{Z}\{(-1)^k\}=\frac{z}{z+1}$

(**) caz special daca $\omega_o h=\pi$ atunci $\mathcal{Z}\{(-e^{-ah})^k\}=\frac{z}{z+e^{-ah}}$

ANEXA II

Scheme Simulink pentru generarea semnalelor:

a) Generarea semnalului treapta;

b) Generarea unor semnale complexe;

c) Generarea unui tren de impulsuri;

d) Generarea unui semnal sinusoidal;

e) Generarea unui semnal numeric, cu exemplificare pe semnalul sinusoidal;

f) Generarea momentelor de timp.