FACULTATEA DE AUTOMATICĂ ŞI CALCULATOARE
DEPARTAMENTUL DE AUTOMATICĂ ŞI INFORMATICĂ INDUSTRIALĂ
Bd.Vasile Pârvan 2
1900 Timişoara
Romania
Tel./Fax.: +40 256 40 32 10; +40 256 40 32 41

MODELAREA MATEMATICA A SISTEMELOR FIZICE ÎN TIMP CONTINUU

A. Obiectivele lucrării

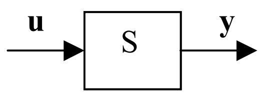
- Fixarea noțiunii de model matematic;
- Însuşirea modului de construcție a modelelor matematice ale sistemelor liniare pe baza modelării fenomenelor elementare;
- Familiarizarea cu modul de utilizare a programului Matlab în problema modelării matematice a sistemelor liniare.

B. Considerații pregătitoare

Descrierea analitică a proceselor din cadrul sistemelor fizice se face cu ajutorul modelelor matematice (MM) ale sistemelor şi ale semnalelor. MM ale sistemelor reprezintă operatori care se aplică MM ale semnalelor de intrare şi furnizează MM ale semnalelor de ieşire. În consecință MM ale sistemelor redau dependența între mărimile sistemului respectiv considerate ca funcții de timp.

MM ale sistemelor în timp continuu sunt reprezentate în domeniul timp de ecuații integro-diferențiale sau de sisteme de ecuații integro-diferențiale. Sistemele în timp continuu sunt caracterizate în mod obişnuit de două categorii de modele matematice :

- modelele matematice intrare-ieşire (MM-II);
- modelele matematice intrare-stare-ieşire (MM-ISI).



În principiu, unui sistem fizic dat i se poate ataşa atât un MM-II cât şi un MM-ISI. **FIG.1**.

Sistemele lineare pot fi reprezentate şi în domeniul imaginilor de MM cu variabile complexe. Se folosesc

- ***matricea de transfer*** - la sistemele multivariabile la intrare şi / sau la ieşire (MIMO)
- ***funcția de transfer*** - la sistemele monovariabile la intrare şi la ieşire (SISO).

În domeniul imaginilor semnalele de ieşire se obțin prin combinarea MM cu variabile complexe ale sistemelor cu imaginile semnalelor de intrare.

1. Modele matematice lineare ale STC, în domeniul timp

a) MM-II pentru STC de tip SISO (fig.1.,u,y∈**R**) au forma canonică

$$a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)} + \ldots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t), \qquad (1)$$

cu condițiile inițiale:

$$y_0^{(i)}, i = 0; n-1. \qquad (2)$$

y(t) reprezintă mărimea de ieşire iar u(t) mărimea de intrare, n este *ordinul* sistemului iar m gradul de anticipare al sistemului. La sistemele strict cauzale n > m iar la cele aflate la limita realizabilității fizice n = m. Polinomul $\mu(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$ se numeşte *polinom caracteristic al sistemului*.

Exemplul 1: Determinarea MM-II al unui cuadripol electric

Se consideră ***c****ircuitul din fig.2. privit ca sistem cu orientarea $u_1 \rightarrow u_2$. La momentul inițial condensatorul este încărcat cu tensiunea u_{Co} iar curentul prin circuit este i(0)=0. Se cere să se determine MM-II al sistemului.*

Pentru rezolvare se pleacă de la ecuațiile circuitului electric care exprima bilanțul dintre tensiunea de intrare şi căderile de tensiune din circuit, respectiv tensiunea de ieşire în funcție de căderile de tensiune din circuit:

$$u_1(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + u_2(t) \qquad (3) \qquad\qquad u_2(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt + u_{co} \qquad (4)$$

Obținerea MM-II impune eliminarea curentului i(t) care, din punctual de vedere al orientării sistemului are rol de mărime auxiliară. În acest scop se derivează relația (4) şi se înlocuieşte rezultatul în (3). Se obține:

$$LC\ddot{u}_2(t) + RC\,\dot{u}_2(t) + u_2(t) = u_1(t) \qquad (5)$$

Întrucât u_2 este tensiunea la bornele condensatorului şi $\dot{u}_2(t) = \frac{1}{C} i(t)$, vom avea şi $u_2(0) = u_{Co}$, respectiv $\dot{u}_2(0) = 0$ .Relația (5) împreună cu aceste condițiile inițiale reprezintă MM-II căutat.

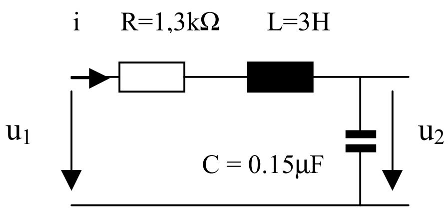


FIG.2.

Numeric MM este :

$$\ddot{u}_2(t) + \frac{1300}{3}\dot{u}_2(t) + \frac{20}{9}\cdot 10^6 u_2(t) = \frac{20}{9}\cdot 10^6 u_1(t), \quad u_2(0) = u_{C0}, u(0) = 0 \quad (5')$$

Observație: Se remarcă faptul că avem de-a face cu un element de tip proporțional cu temporizare de ordinul al doilea (ET-PT2)♣ având :

- coeficientul de transfer : K=1

♣ MM-II al unui ET-PT2 are forma: $T^2\ddot{y}(t) + 2\cdot\zeta\cdot T\cdot\dot{y}(t) + y(t) = K\cdot u(t)$

- pulsația naturală: $\omega_n = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = 1490{,}71\,\text{sec}^{-1}$

- factorul de amortizare: $\zeta = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}} = 0{,}1453$.

b) MM-ISI al unui sistem în timp continuu este reprezentat de un sistem de ecuații diferențiale de ordinul I numite ***ecuații de stare***, care permit calculul derivatelor mărimilor de stare (estimează tendința de evoluție a sistemului) şi de un sistem de relații algebrice numit ***ecuații de ieşire***, care permit calculul mărimilor de ieşire. Ca mărimi de stare trebuie alese acele mărimi care nu prezintă salturi în raport cu timpul: spațiul, viteza,... , deplasarea unghiulară, viteza unghiulară,…în sistemele mecanice, tensiunile la bornele condensatoarelor, curenții prin bobine la circuitele electrice inductive, … în sistemele electrice, temperatura şi derivatele sale în sistemele termice etc.

Pentru sistemele lineare, MM-ISI au forma canonică:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t);\ x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned} \tag{6}$$

In cazul strict cauzal D = 0, iar la limita cauzalității D ≠ 0. În (6) $u(t)\in \mathbf{R}^m$ este vectorul mărimilor de intrare, $y(t)\in \mathbf{R}^q$ este vectorul mărimilor de ieşire $x(t)\in \mathbf{R}^n$ reprezintă vectorul mărimilor de stare. Matricele au dimensiuni corespunzătoare operațiilor cu aceşti vectori. Distingem: matricea sistemului A(n,n), matricea de comandă B(n,q), matricea de ieşire C(p,n), matricea de interconexiune (intrare-ieşire) D(p,q). Dacă sistemul este monovariabil la intrare şi la ieşire atunci **B=b** (vector coloană) şi $\mathbf{C}=\mathbf{c}^T$ (vector linie). Pentru un sistem fizic MM-ISI nu sunt unice.

Plecând de la MM-ISI polinomul caracteristic se determină cu relația:

$$\mu(s) = \det(s \cdot I - A). \tag{7}$$

Aşadar, el este dat numai de matricea sistemului.
Dimensiunea lui x, adică numărul n al variabilelor de stare, se numeşte ordinul sistemului. El indică numărul elementelor concentrate acumulatoare de energie din structura sistemului.

Exemplul 2. Determinarea MM-ISI al unui cuadripol electric
Să se determine un MM-ISI pentru circuitul electric din fig.2 considerat ca sistem potrivit exemplului 1.

Sistemul are două elemente concentrate acumulatoare de energie, inductanța L şi capacitatea C. Deci este de ordinul al doilea. Ca urmare pentru modelare vom utiliza două variabile de stare. Considerăm ca variabile de stare curentul prin bobină i(t) care caracterizează energia acumulată în câmpul magnetic căruia îi corespunde inductanța L şi tensiunea pe condensator $u_C(t) = u_2(t)$ care caracterizează energia acumulată în câmpul electric căruia îi corespunde capacitatea C. Aşadar, vectorul mărimilor de stare este:

$$x(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix} \tag{8}$$

Din relațiile (3) şi (4) se deduc pentru derivatele mărimilor de stare ecuațiile:

$$\begin{cases} \dfrac{di(t)}{dt} = -\dfrac{R}{L}i(t) - \dfrac{1}{L}u_C(t) + \dfrac{1}{L}u_1(t) \\ \dfrac{du_C(t)}{dt} = \dfrac{1}{C}i(t) \end{cases} \qquad (9)$$

Relațiile (9) împreună ecuația mărimii de ieşire şi cu condițiile inițiale:

$$i(0) = 0, \quad u_C(0) = u_{co}$$

(10)

reprezintă un MM-ISI al sistemului din fig.2. In formă matriceală el se scrie:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} i(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_1(t), \qquad \begin{bmatrix} i(0) \\ u_C(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_{Co} \end{bmatrix} \\ u_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

(11)

Numeric, pentru datele din fig. 2 se obține :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} i(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -\dfrac{1300}{3} & -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{20}{3} \cdot 10^6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} u_1(t), \qquad \begin{bmatrix} i(0) \\ u_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_{co} \end{bmatrix} \\ u_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

(12)

2. Modele matematice ale STC în domeniul imaginilor

Aceste MM, caracteristice sistemelor lineare, au, atunci când se foloseşte transformata Laplace bilaterală sau atunci când se foloseşte transformata Laplace unilaterală în condiții inițiale nule, forma:

$$y(s) = H(s)u(s). \qquad (13)$$

y(s) reprezintă imaginea Laplace a lui y(t) şi are dimensiunea (p,1); u(s) reprezintă imaginea Laplace a lui u(t) şi are dimensiunea (q,1); H(s) este matricea de transfer şi are dimensiunea (p,q). Componentele sale, $H_{ij}(s)$, se numesc funcții de transfer (f.d.t.).

În particular, pentru sisteme de tip SISO, matricea de transfer se reduce la o singură f.d.t. Ea se obține (14) trecând MM-II (1), în condițiile precizate, în domeniul operațional şi calculând raportul între imaginea Laplace a mărimii de ieşire şi imaginea Laplace a mărimii de intrare.

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \qquad (14)$$

Rădăcinile polinomului de la numărătorul sistemului se numesc *zerourile sistemului* iar rădăcinile polinomului caracteristic se numesc *polii sistemului*.

În cazul utilizării transformatei Laplace unilaterale, MM-II în domeniul operațional conține şi condițiile inițiale, având forma:

$$y(s) = H(s)u(s) + \sum_{i=0}^{n-1}[H_{yi}(s)\,y^{(i)}(0_-) - H_{ui}(s)\,u^{(i)}(0_-)] \quad , \tag{15}$$

unde 0_- poate fi înlocuit cu 0_+ dacă e cazul, H(s) este dat de (10) iar :

$$H_{ui}(s) = \frac{b_n s^{n-i-1} + \ldots b_{i+2}s + b_{i+1}}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \quad , \; H_{yi}(s) = \frac{a_n s^{n-i-1} + \ldots a_{i+2}s + a_{i+1}}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \,. \tag{16}$$

Exemplul 3. Determinarea MM-II operațional al cuadripolului din exemplul 1.

Pornind de la MM-II dat de relația (5) şi ținând seama de condițiile inițiale se obține, în final, prin aplicarea relațiilor (13), (12) şi (14) relația:

$$u_2(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}\left[\frac{1}{LC}u_1(s) + (s + \frac{R}{L})u_{Co} - \dot{u}_1(0_-)\right] \quad \text{cu} \quad \dot{u}_1(0_-) = \frac{1}{C}i(0) \tag{17}$$

//

Pornind de la MM-ISI în forma canonică (5), matricea de transfer se poate calcula cu relația:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{18}$$

Exemplul 4. Calculul f.d.t. a circuitului din fig. 2

Plecând de la MM-ISI (9), cu formula (14) se obține:

$$H(s) = \frac{u_2(s)}{u_1(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \tag{19}$$

//

Mediul MATLAB ne permite să calculăm numeric m.d.t. (f.d.t.) din MM-ISI şi MM-ISI din m.d.t. (f.d.t.). MM-ISI asociat unei m.d.t. (f.d.t.) se numeşte realizare sistemică.

Exemplul 5. Să se scrie un program Matlab care furnizează realizarea sistemică asociată MM-II (5') sau (17).

Programul foloseşte funcția Matlab *tf2ss* şi are aspectul:

```
num = [20 / 9 * 1e6];
den = [1  1300 / 3  20 / 9 * 1e6];
[A, B, C, D] = tf2ss (num, den )
```

Primele două linii ale programului setează valorile coeficienților funcției de transfer (sau ai MM-II) în vectorii linie *num* şi *den* sub forma canonică

$$num = [b_m , b_{m-1} ,\ldots, b_1 , b_0];$$
$$den = [a_n , a_{n-1} ,\ldots, a_1 , a_0]$$

Ultima linie calculează matricele A, B, C, D corespunzătoare *realizării standard controlabile,* adică matricele MM-ISI de forma:

$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} & -\dfrac{a_{n-2}}{a_n} & \cdots -\dfrac{a_1}{a_n} & -\dfrac{a_o}{a_n} \\ 1 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{B=b} \cdot u(t) \\[2ex]
y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{b_{n-1}}{a_n} & \dfrac{b_{n-2}}{a_n} & \cdots & \dfrac{b_o}{a_n} \end{bmatrix}}_{C=c^T} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)}_{D=d} \cdot u(t)
\end{cases}
.
$$

C. Programul lucrării

1) Calculați MM-II, MM-ISI şi f.d.t pentru circuitul din fig. 3. Precizați polinomul caracteristic.

2) **E**xtrageți sintaxele instrucțiilor: ss2tf, tf2ss şi aplicați instrucțiile modelelor calculate la punctul B1).

3) Folosind programul Matlab şi mediul Simulink, validați tripletul de modele echivalente de la punctele 1) şi 2) pe baza răspunsului acestora în condiții inițiale nule la un semnal de intrare dat, precizat de conducătorul lucrării. Indicație: v. schemele Simulink din Anexă.

4) Pentru circuitul din exemplul 1 se consideră condițiile inițiale $u_C(0) = 2$ V şi $i(0) = 0.05$ A. Realizați şi utilizați schema Simulink care calculează pe baza formulei (15) răspunsul sistemului la un semnal de intrare dat, precizat de conducătorul lucrării. Indicație: v. schema Simulink din Anexă.

D. Conținutul referatului

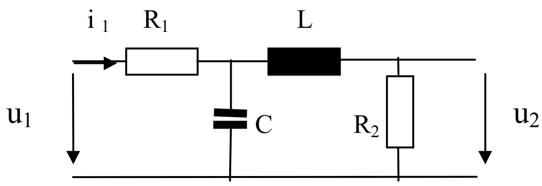


FIG.3 Sistem cu orientarea $u_1 \rightarrow u_2$

Valori numerice: L=3H; C= 0.15μF; R_2=2 kΩ

Pentru R_1 se consideră trei situații:

a) R_1=1 kΩ; b) R_1=2,7 kΩ; c) R_1=6,8 kΩ.

Referatul va conține:

.

- Calculul modelelor cerute la B1 şi analiza acezarea acestora prin precizarea : i) ordinului sistemului, ii) dimensiunilor matricelor, iii) gradului polinomului caracteristic, iv) identificarea parametrilor, v) identificarea influenței parametrilor asupra caracterului sistemului.
- Sintaxele instrucțiilor extrase la punctul B2).
- Schema Simulink utilizată la validarea rezultatelor.
- Rezultatele validării, comentarii.

E. Întrebări

1) Care sunt formele canonice ale MM-II, MM-ISI şi f.d.t ale STC lineare?

2) Cum se obține pentru un STC: i) m.d.t. (f.d.t.) din MM-ISI, ii) f.d.t. din MM-II, iii) polinomul caracteristic?

3) Ce fel de conversii de MM se pot realiza cu instrucțiile MATLAB ss2tf, tf2ss ?

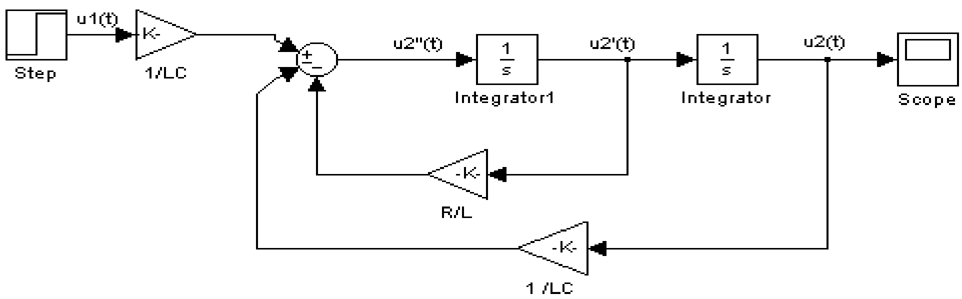
4) Care este forma canonică a MM-ISI obținută utilizând instrucția MATLAB tf2ss? Ce conexiuni faceți pentru a o reține?

5) Ce tipuri de semnale ați utilizat la validarea modelelor ? Ce tipuri de comportament au prezentat sistemele ale căror MM le-ați validat ?

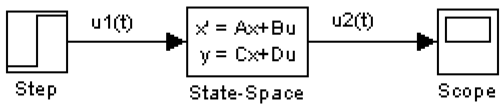
Anexă

Pentru punctul C3) :

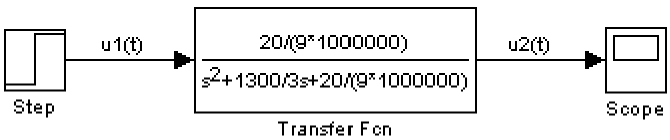
☛ MM-II:



☛ MM-ISI:



☛ FDT:



Pentru punctul C4) :