FACULTATEA DE AUTOMATICĂ ŞI CALCULATOARE
DEPARTAMENTUL DE AUTOMATICĂ ŞI INFORMATICĂ INDUSTRIALĂ
Bd.Vasile Pârvan 2
1900 Timişoara
Romania
Tel./Fax.: +40 256 40 32 10; +40 256 40 32 41

TEORIA SISTEMELOR I – LUCRAREA DE LABORATOR 7

Studiul sistemelor liniare în timp continuu în regim armonic

A. Obiective

- Consolidarea noțiunilor de bază referitoare la regimul armonic al sistemelor lineare;
- Însuşirea unor tehnici de simulare utile pentru studiului regimului armonic;
- Cunoaşterea criteriului rezervei de fază.

B. Considerații pregătitoare

B.1. Regimul armonic al sistemelor lineare, caracteristici Bode.

Regimul permanent sinusoidal (denumit şi *regim armonic* sau *regim cvasistaționar*) este regimul de funcționare al unui sistem linear caracterizat prin variații sinusoidale în raport cu timpul ale tuturor mărimilor caracteristice ale sistemului. În cadrul variațiilor sinusoidale ale acestor mărimi parametrii care diferă sunt amplitudinile şi fazele. În particular, dacă la intrarea sistemului S din fig. 1 se aplică semnalul sinusoidal

$$u(t) = u_m \cdot \sin \omega t \qquad (1)$$

atunci la ieşire se obține în regim armonic tot un semnal sinusoidal de forma

$$y(t) = y_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)\,. \qquad (2)$$

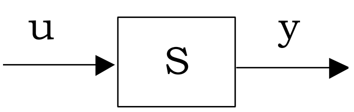

Fig. 1 Sistem linear cu orientarea u →y.

Experimental se constată că valorile raportului amplitudinilor $\frac{y_m}{u_m}$ şi fazei φ sunt funcții de pulsația ω:

$$\frac{y_m}{u_m} = f_1(\omega) \quad , \quad \varphi = f_2(\omega)\,. \qquad (3)$$

Ansamblul celor două funcții este denumit *caracteristici de pulsație*.

Caracteristicile de pulsație pot fi obținute şi teoretic plecând de la *funcția răspuns la pulsații*

$$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}, \qquad \omega \in (-\infty,+\infty) \qquad (4)$$

care reprezintă particularizarea funcției de transfer în lungul axei imaginare a planului complex “s”. Cantitatea complexă H(jω) se descrie algebric prin relația

$$H(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \qquad (5)$$

în care

$$P(\omega) = \mathrm{Re}\{H(j\omega)\} \quad ; \quad Q(\omega) = \mathrm{Im}\{H(j\omega)\} \qquad (6)$$

iar sub formă polară prin relația:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|\, e^{j\arg(H(j\omega))} \quad . \qquad (7)$$

Reprezentarea grafică în planul “H” a perechii (P(ω),Q(ω)) cu ω parametru în domeniul (-∞, +∞) este cunoscută sub denumirea de *hodograf Nyquist*. Hodograful Nyquist este simetric față de axa reală a planului “H”. Datorită acestui fapt el se trasează adeseori numai pentru $\omega \in [0,\infty)$.

Se demonstrează că cele două caracteristici de pulsație pot fi obținute din funcția de răspuns la pulsații cu relațiile:

$$\boxed{f_1(\omega) = |H(j\omega)| \ , \quad f_2(\omega) = \arg H(j\omega)} \ . \qquad (8)$$

Relațiile (8) *sunt de importanță fundamentală întrucât ele pun în legătură caracteristici definite experimental cu caracteristici determinabile teoretic.*

Prin *caracteristici Bode* se înțelege perechea de caracteristici

$$|H|_{dB} = F_1(\omega_{lg}) \text{, în care } |H|_{dB} = 20\lg|H(j\omega)| \text{, } \omega_{lg} = \lg\omega, \ \omega \in (0,\infty) \qquad (9)$$

$$\varphi_H = F_2(\omega_{lg}) \text{, în care } \varphi_H = \arg H(j\omega) \text{, } \omega_{lg} = \lg\omega, \ \omega \in (0,\infty) \qquad (10)$$

asociată caracteristicilor de pulsație (3). Caracteristicile Bode sunt denumite şi *caracteristici (logaritmice) de pulsație*. Caracteristica (9) se numeşte *caracteristică amplitudine-pulsație* (c.a.-p.), iar caracteristica (10) *caracteristică fază-pulsație* (c.f.-p)**.**

Hodograful Nyquist şi caracteristicile logaritmice de pulsație sunt utilizate în analiza sistemelor, în particular pentru analiza stabilității sistemelor şi proiectarea sistemelor de reglare automată.

Construcția lor se poate face exact numai prin puncte. Mediul MATLAB permite calculul şi reprezentarea grafică a hodografului Nyquist şi a caracteristicilor de pulsație ale sistemelor lineare. Astfel, calculul celor două componente P şi Q din (4) şi (5) se poate face cu funcția: *nyquist* folosind instrucțiunea

```
[P,Q]=nyquist(num,den,omega)
```

în care `num` şi `den` definesc numitorul, respectiv numărătorul funcției de transfer H(s), iar

```
omega = logspace(d1, d2, N);
```

domeniul pulsațiilor $\omega \in \left[10^{d1}, 10^{d2}\right]$ discretizat la scară logaritmică în `N` puncte echidistante.

Calculul caracteristicilor Bode se poate face folosind funcția *bode* prin instrucțiuni de forma

```
[Am, fi]= bode(num,den,omega),
```

unde Am = $f_1(\omega_{lg})$ şi fi = $f_2(\omega_{lg})$ şi convertind apoi raportul `Am` al amplitudinilor în dB *:*

```
HdB= 20 * log10(Am).
```

B.2. Criteriul rezervei de fază.

Tehnicile frecvențiale permit studiul stabilității unui sistem în circuit închis realizat prin reacție unitară negativă (fig. 2) pe baza informațiilor referitoare la sistemul deschis asociat prin întreruperea reacției.

Un mijloc folosit în mod frecvent este *criteriul rezervei de fază,* care face uz de caracteristicile Bode ale sistemului deschis. El se referă la cazul când funcția de transfer a sistemului în circuit deschis are forma:

$$\tilde{H}(s) = \frac{K}{s^{\alpha}} \cdot \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \cdot e^{-T_m s} \tag{11}$$

cu: $K > 0$; $a_i > 0$, $i=1,...,n$; $b_j > 0$, $j=1,...,m$); $T_m \geq 0$; $\alpha \in \{0,1,2,3\}$.

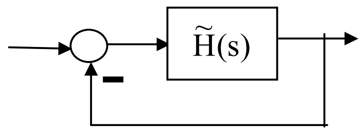

Fig.2. Sistem cu reacție unit.

Fie $\left|\tilde{H}\right|_{dB}$, şi $\varphi_{\tilde{H}}$ caracteristicile Bode ale sistemului deschis, ω_t cea mai mare pulsație de tăiere a caracteristicii $\left|\tilde{H}\right|_{dB}$

$$\omega_t = \max\{\omega \,\big|\, |H(j\omega)|_{dB} = 0\} \tag{12}$$

şi *rezerva de fază*:

$$\varphi_{rez} = \pi + \varphi_{\tilde{H}}(\omega_t) \tag{13}$$

Criteriul *rezervei de fază* se enunță astfel:

> *Sistemul în circuit închis din fig. 2 pentru care funcția de transfer a sistemului deschis are expresia* (11) *este asimptotic stabil dacă şi numai dacă* $\varphi_{rez} > 0$.

În acest context se defineşte şi *rezerva de amplitudine* ca fiind:

$$r_a = \left|\tilde{H}(j\omega_a)\right|_{dB}, \tag{14}$$

unde pulsația ω_a este soluția ecuației

$$\varphi(\omega_a) = \pi\,. \tag{15}$$

Ea este o măsură a cantității cu care se poate modifica amplificarea sistemului deschis astfel ca sistemul închis să ajungă la limita de stabilitate.

În MATLAB există funcția *margin* care permite calculul valorilor mărimilor r_a, φ_{rez}, ω_a, ω_t. Sintaxa sa este:

```
[ra, φrez, ωa, ωt] = margin(Am,fi,ω).
```

B.3. Exemplu

Fie sistemul din fig. 2 în care

$$\tilde{H}(s) = \frac{K}{s^3 + 2\cdot s^2 + 2\cdot s + 3},\ K=10.$$

i) Să se traseze hodograful Nyquist şi caracteristicile Bode ale sistemului deschis.

ii) Să se analizeze stabilitatea sistemului închis în funcție de parametrul K>0.

Soluție : Programul MATLAB care rezolvă problema dată este:

```
% descrie f.d.t. Se vor calcula c.d.p. pentru K=1.
num=[10] ;
den=[1,2,2,3];
% descrie domeniul pulsațiilor
omega=logspace(-2,3,500);
% calculează componentele hodografului
[P,Q]=nyquist(num,den,omega);
% reprezintă grafic hodograful
plot(P,Q),grid,title('Hodograful Nyquist'),grid
pause
% calculează caracteristicile de pulsație
[Am, fi]= bode(num,den,omega);
Hdb=20*log10(Am);
% reprezintă grafic caracteristicile de pulsație
subplot(211),semilogx(omega,Hdb)
title('Caracteristica amplitudine-pulsatie'),grid
subplot(212),semilogx(omega,fi)
title('Caracteristica faza-pulsatie'),grid
% calculează rezervele de fază şi amplitudine
[ra,firez,omegara,omegafirez]= margin(Am,fi,omega)
```

Hodograful Nyquist este reprezentat în fig.3 iar c.d.p. sunt reprezentate în fig.4.

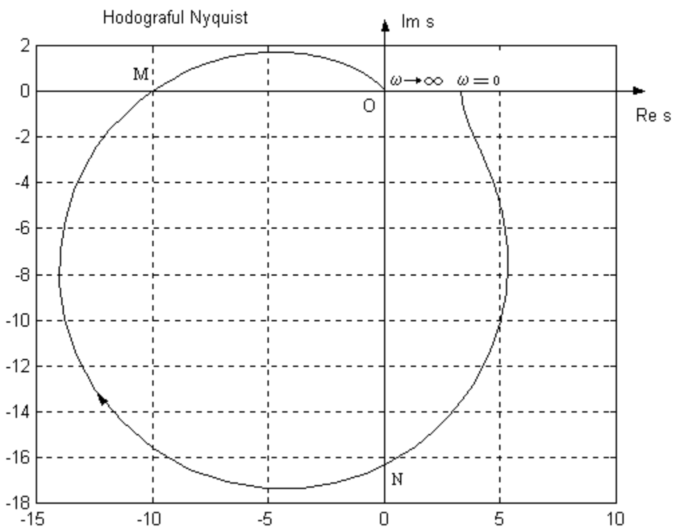

Fig.3. Hodograful Nyquist corespunzător exemplului 1

ii) Potrivit figurii 4:

- pentru $K = K_0 = 10$, sistemul are pulsația de tăiere $\omega_t = 2{,}2556$ [rad/sec] (linia roşie) şi rezerva de fază $\varphi_{rez} = -\ 44{,}1462$ [˚](săgeata roşie);
- prin urmare pentru $K = K_0 = 10$ sistemul este *instabil*;
- rezerva de amplitudine este r_a=12 dB (săgeata verde);
- în consecință, sistemul este stabil pentru $K< K_{max} = K_0 \cdot 10^{-12/20} = 10^{0.4} = 2.52$.

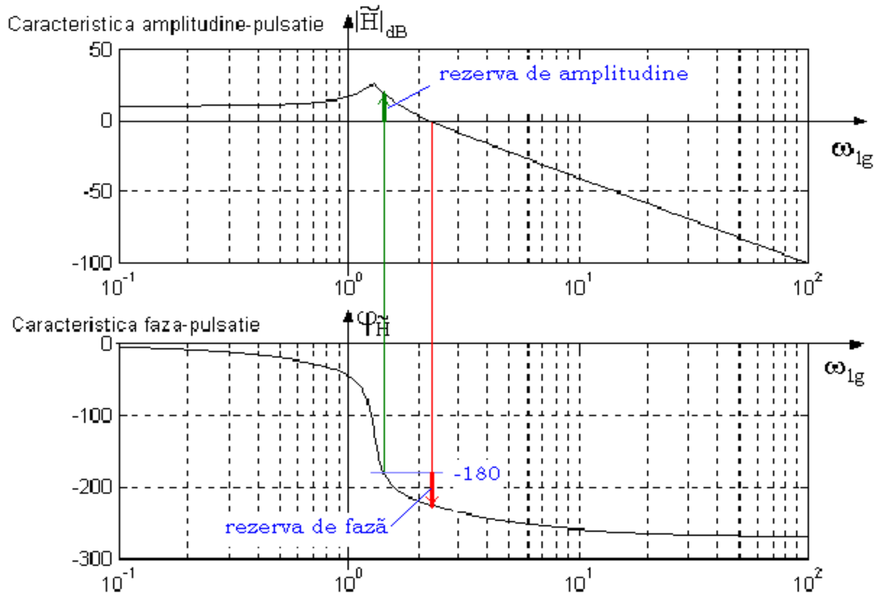

Fig.4 Caracteristicile logaritmice de pulsație

O altă posibilitate de a rezolva problema pusă constă în utilizarea schemelor Simulink. Procedeul se prezintă prin intermediul reluării exemplului anterior. În fig. 5 se prezintă schema Simulink utilizabilă pentru modelarea sistemului deschis.

Pentru calculul şi trasarea grafică a caracteristicilor de pulsație se procedează în felul următor:

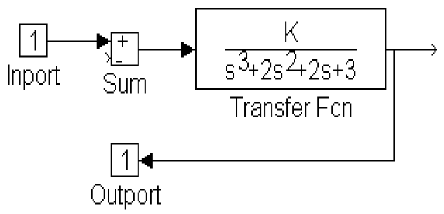

Fig. 5. Schemă Simulink pentru exemplului 1

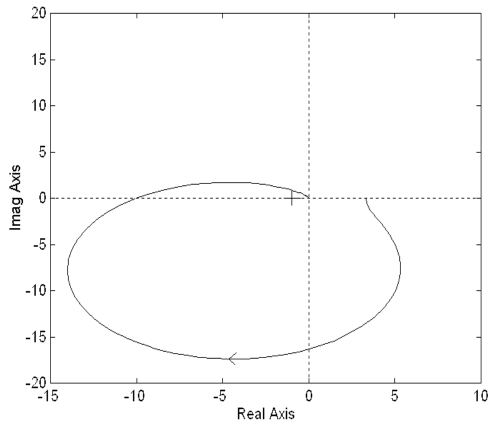

Fig. 6. Hodograful Nyquist pt. exemplul 1

- Se salvează schema Simulink din fig. 1 sub un nume de fişier Matlab, de exemplu *srbd*.
- Se trece în Matlab unde se scriu următoarele instrucțiuni:

```
[a,b,c,d]=linmod('srbd');
nyquist(a,b,c,d);
bode(a,b,c,d);
```

Prima instrucțiune calculează parametrii modelului matematic intrare-stare-ieşire ataşat sistemului din fişierul *srbd*.

A doua instrucţiune calculează şi trasează grafic hodograful Nyquist al sistemului cu parametrii calculaţi anterior. Hodograful Nyquist obţinut se prezintă în fig. 6;

Ultima instrucţiune calculează şi trasează grafic caracteristicile Bode al sistemului, cu parametrii determinaţi anterior. Se obţin caracteristicile din fig. 7.

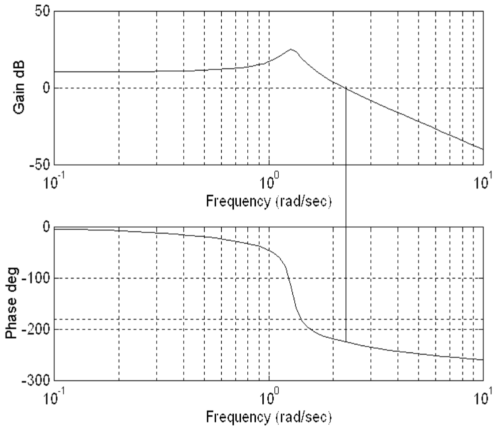

Fig. 7. Caracteristici Bode pt. exemplul 1

C. Programul lucrărilor

1) Trasarea hodografului Nyquist şi reprezentarea caracteristicile Bode ale sistemului deschis corespunzător sistemului din fig.2 atunci când funcţia de transfer a sistemului deschis este $\widetilde{H}(s) = \dfrac{K}{T^2 s^2 + 2\cdot\zeta\cdot T\cdot s + 1}$ cu K = 10, T = 0.1 sec., în situaţiile: i) ζ=0.35; ii) ζ=0.7; iii) ζ=1; iv) ζ=2. Analiza stabilităţii sistemului închis pe baza rezultatelor anterioare.

2) Trasarea caracteristicilor Bode ale sistemului din fig. 2 în situaţiile de la punctele 1) – i) şi 1) – iv) de mai sus.

3) Trasarea hodografului Nyquist şi reprezentarea caracteristicile Bode ale sistemului deschis corespunzător fig.2 atunci când funcţia de transfer a sistemului deschis este $\widetilde{H}(s) = \dfrac{2}{s} e^{-0.5s}$. Analiza stabilităţii sistemului închis pe baza rezultatelor anterioare.

D. Conţinutul referatului

Referatul va conţine hodografurile şi caracteristicile Bode de la punctele C 1) şi C 3) şi soluţionarea completă a punctului C 2).

E. Întrebări

1) Ce se înţelege prin regim permanent ? Dar prin regim permanent sinusoidal ?
2) Care sunt funcţiile MATLAB care permit studiul sistemelor în domeniul pulsaţiilor ?
3) Enunţaţi criteriul rezervei de fază şi precizaţi ce semnificaţie au mărimile utilizate.
4) Cum se defineşte funcţia răspuns la pulsaţii pentru sistemele în timp continuu?
5) Cum se definesc caracteristicile Bode ale unui sistem linear ?
6) Ce legătură se poate stabili între caracterul unui sistemului şi c.a.p. a acestuia ?
7) Explicaţi cum veţi rezolva problema de la punctual C 2) ?
8) Cum argumentaţi importanţa relaţiilor (8) ?
9) Explicaţi afirmaţia care urmează după relaţia (15): *Ea este o măsură a cantităţii cu care se poate modifica amplificarea sistemului deschis astfel ca sistemul închis să ajungă la limita de stabilitate.*